$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx$ の形の汎関数に対する動きうる境界をもつ問題

汎関数,

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx \ldots \tag{1}$$

の境界点の一つあるいは両方が動きうる場合,

（中略）

$$\boxed{[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}]_{x=x_1}\delta y_1 + [F_{z'}]_{x=x_1}\delta z_1 = 0} \tag{2}$$

$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ が独立であれば,

$$[F - y'F_{y'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0 \quad and \quad [F_{y'}]_{x=x_1}\delta y_1 \;\; and \quad [F_{z'}]_{x=x_1}\delta z_1 = 0$$

つまり,

$$\boxed{[F - y'F_{y'}]_{x=x_1} = 0 \quad and \quad [F_{y'}]_{x=x_1} \;\; and \quad [F_{z'}]_{x=x_1} = 0}$$

境界点 $B(x,y,z)$ が曲線 $y_1 = \varphi(x_1), z_1 = \psi(x_1)$（$\Psi$ プサイ）上を動きうるならば，$\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1, \delta z_1 = \psi'(x_1)\delta x_1$（この部分 [1] の記述誤り）であるから，極値曲線に対する条件は,

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0$$

δx_1 は任意なので,

$$\boxed{[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0}$$

これは (1) の横断性の条件と呼ぶ.

境界点 $B(x,y,z)$ が曲面 $z_1 = \varphi(x_1,y_1)$ 上を動きうるならば，$\delta z_1 = \varphi_{x_1}\delta x_1 + \varphi_{y_1}\delta y_1$（$z_1$ の全微分）であるから，(2) に代入すると,

$$[F - y'F_{y'} + (\varphi_{x_1} - z')F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'} + F_{z'}\varphi_{y_1}]_{x=x_1}\delta y_1 = 0$$

$\delta x_1, \delta y_1$ は独立であるから,

$$\boxed{[F - y'F_{y'} + (\varphi_{x_1} - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0, [F_{y'} + F_{z'}\varphi_{y_1}]_{x=x_1} = 0}$$

（後略）

例題 1． 汎関数,

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y,z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}dx, z_1 = \varphi(x_1, y_1)$$

の横断性の条件は,

$$\begin{cases} \left[A(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2} - y'\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + (\varphi_{x_1} - z')\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\varphi_{y_1}\right]_{x=x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[A(x,y,z)\left(1+y'^2+z'^2\right) - A(x,y,z)y'^2 + A(x,y,z)(\varphi_{x_1}-z')z'\right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[A(x,y,z)y' + A(x,y,z)z'\varphi_{y_1}\right]_{x=x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[1+\varphi_{x_1}z'\right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[y' + z'\varphi_{y_1}\right]_{x=x_1} = 0 \end{cases}$$

つまり, $x = x_1$ において, $z' = \dfrac{-1}{\varphi_{x_1}} = -\dfrac{y'}{\varphi_{y_1}}$, つまり, $\dfrac{1}{\varphi_{x_1}} = \dfrac{y'}{\varphi_{y_1}} = \dfrac{z'}{-1}$ である.

xyz 空間上の曲線 $y = y(x), z = z(x)$ の $(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y(x_1), z(x_1))$ における接線は,

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{y'(x_1)} = \frac{z-z_1}{z'(x_1)}$$

つまり, この接線の方向ベクトルは $(1, y'(x_1), z'(x_1))$ である.

また, xyz 空間上の曲面 $z = \varphi(x,y)$ 上の点 $(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, \varphi(x_1))$ における接平面の方程式は,

$$z - z_1 = [\varphi_x]_{x=x_1, y=y_1}(x-x_1) + [\varphi_y]_{x=x_1, y=y_1}(y-y_1)$$

法線ベクトルは $(\varphi_{x_1}, \varphi_{y_1}, -1)$ なので, この 2 つのベクトルは平行である. よって横断性の条件は極値曲線が曲面 $z = \varphi(x,y)$ に直交することである.

例題 2. 別解

2 点 $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, \varphi(x_0))$, $(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, \psi(x_1))$ 間の距離が極値となる必要条件を求める.

言い換えると, 4 変数の関数,

$$(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 \dots \tag{3}$$

の極値になるときを調べれば, よいことになる. (3) の両辺を x_1 で偏微分すると,

$$2(x_1-x_0) + 2(z_1-z_0)\psi_x(x_1,y_1) = 0 \dots \tag{4}$$

同様に y_1 で偏微分すると,

$$2(y_1-y_0) + 2(z_1-z_0)^2\psi'_y(x_1,y_1) = 0 \dots \tag{5}$$

(4),(5) より,

$$\frac{z_1-z_0}{-1} = \frac{y_1-y_0}{\psi'_y(x_1,y_1)} = \frac{x_1-x_0}{\psi'_x(x_1,y_1)}$$

よって, 2 点を結ぶ直線は, 双方の曲面に直交することがわかる.

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版, 1972 年）