動きうる境界をもつ変分の問題 (1)

（前略）

　極値に対する基本的な必要条件は,

$$\boxed{[F - y'F_{y'}]_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}]_{x=x_1}\delta y_1 = 0}$$

$\delta x_1, \delta y_1$ が独立であれば,

$$[F - y'F_{y'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0 \quad and \quad [F_{y'}]_{x=x_1}\delta y_1 = 0$$

つまり,

$$\boxed{[F - y'F_{y'}]_{x=x_1} = 0 \quad and \quad [F_{y'}]_{x=x_1} = 0}$$

$\delta x_1, \delta y_1$ が独立でない場合で，(x_1, y_1) が曲線,

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

上にある場合は,

（中略）

$$\boxed{[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0\}}$$

この関係は横断性の条件 ($transversality\ condition$) とよばれる.

　左端の点 (x_0, y_0) が曲線,

$$y_1 = \psi(x_1)$$

上にある場合は，同じ議論によって,

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$$

である.

　例題 1.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}dx$$

の横断性の条件は,

$$\left[A\sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\varphi' - y')Ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

$$\left[\frac{A(1 + y'^2) + (\varphi' - y')Ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

$$\left[\frac{A(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

端点において，$A \neq 0$ ならば，つまり $A(x_1, y) \neq 0$ ならば，

$$1 + \varphi' y' = 0$$

つまり，横断性の条件は直交条件となる．

例題 1．の類題

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 - y'^2}dx$$

の横断性の条件は，

$$\left[A\sqrt{1 - y'^2} - \frac{(\varphi' - y')Ay'}{\sqrt{1 - y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

$$\left[\frac{A(1 - y'^2) - (\varphi' - y')Ay'}{\sqrt{1 - y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

$$\left[\frac{A(1 - \varphi' y')}{\sqrt{1 - y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

端点において，$A \neq 0$ ならば，つまり $A(x_1, y) \neq 0$ ならば，横断性の条件は

$$1 - \varphi' y' = 0$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\varphi'}$$

同じ汎関数において，端点 (x_1, y_1) が鉛直線上のみを動きうるなら，後述のように $[F_{y'}]_{x=x_1} = 0$，つまり，

$$\left[-\frac{Ay'}{\sqrt{1 - y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0$$

$$y'(x_1) = 0$$

となる．

（中略）

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）