$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx$ の形の汎関数に対する動きうる境界をもつ問題

汎関数,

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx \ldots \tag{1}$$

の極値の必要条件を決定するために,

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1$$

という条件を必要とした．これらの中のいくつかが変化しうるとき，このような問題は**変化しうる，あるいは動きうる境界をもつ問題** (***problem with variable or movable boundaries***) とよばれる．

（中略）

$$\boxed{\left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dx}(F_{y''})\right]_{x=x_1} \delta x_1 + \left[F_{y'} - \frac{d}{dx}(F_{y''})\right]_{x=x_1} \delta y_1 + [F_{y''}]_{x=x_1} \delta y'_1 = 0}$$

（後略）

例題 汎関数,

$$v = \int_0^1 (1 + y''^2)dx$$

の極値を調べよ．ただし，$y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, y'(1) = variable$ とする．

解 オイラー・ポアソンの方程式は,

$$y^{(4)} = 0$$

となり，その一般解は,

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

となる．

与えられた境界条件から,

$$C_4 = 0, C_3 = 1, C_1 + C_2 = 0$$

$$[F_{y''}]_{x=1} = 0$$

$$\therefore y''(1) = 0$$

$$C_1 + 3C_2 = 0$$

$$\therefore C_1 = C_2 = 0$$

$$\therefore y = x$$

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）